Балаковский инженерно-технологический институт - филиал
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Методические указания к выполнению курсовой работы

по дисциплине «Численные методы»

для студентов направления «Управление в технических системах»

всех форм обучения

Балаково 2016

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Весь материал для выполнения задания курсовой работы изучается в рамках лекционного курса дисциплины «Численные методы». Вариант выполнения курсовой работы выбирается студентом и согласовывается с преподавателем.

Методика оценки курсовой работы – общая оценка за работу составляет 100 баллов.

Баллы (рейтинговой оценки)	**Оценка экзамена** (стандартная)	**Требования к знаниям**
90-100	*«отлично»*	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он выполнил все задания курсовой работы, владеет методикой применения тех или иных численных методов и успешно прошел защиту курсовой работы.
75-90	*«хорошо»*	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он выполнил 9 заданий курсовой работы владеет основными методами численного исчисления, не допускает существенных ошибок при ответе на вопрос и успешно прошел защиту курсовой работы.
60-75	*«удовлетво-рительно»*	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он выполнил 7 заданий курсовой работы успешно прошел ее защиту, но при этом не усвоил всех деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении материала.
менее 60	*«неудовле-творительно»*	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не владеет теоретическими сведениями о численных методах линейной и нелинейной алгебры, интерполяции и итерационных методов. Не прошел успешно защиту курсовой работы.

Задание 1.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ГАУССА

Методом Гаусса вычислить определитель, обратную матрицу и решить СЛАУ вида: $A*\bar{x}=\bar{b}$

$$A=\begin{bmatrix} N_c & 5 & 2 \\ 5 & N_c & -N_г \\ 2 & -N_г & N_c \end{bmatrix} \qquad \bar{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ N_c \\ -N_г \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} N_c+5 & 0 & N_г & N_г \\ 3 & 3 & 0 & N_г \\ 2 & 5 & 3 & N_c \\ N_c & N_c+N_г & N_c & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ N_c \end{bmatrix}$$

где Nc – номер студент по списку; Nг –номер группы.

Задание 2.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ

Методом прогонки вычислить решение СЛАУ с расширенной матрицей порядка n=5

$$a_i = i * N_c + N_г,\ b_i = i * N_c = i + N_г,\ c_i = N_г - i * N_c,\ d_i = N_c + N_г * i$$

Задание 3.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ И МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ

Методом простых итераций и методом Зейделя решить СЛАУ

$$A=\begin{bmatrix} N_c+5 & 0 & N_г & N_г \\ 3 & 3 & 0 & N_г \\ 2 & 5 & 3 & N_c \\ N_c & N_c+N_г & N_c & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ N_c \end{bmatrix}$$

где Nc – номер студент по списку; Nг –номер группы.

С заданной точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Сделать выводы о сходимости методов.

Задание 4.

РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

4.1Степенным методом найти спектральный радиус и ему соответствующий собственный вектор

Исходные данные:

$$A=\begin{bmatrix} N_c+5 & 0 & N_г & N_г \\ 3 & 3 & 0 & N_г \\ 2 & 5 & 3 & N_c \\ N_c & N_c+N_г & N_c & 1 \end{bmatrix} \qquad w^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Степенной метод вычисления заключается в следующем: необходимо определить вектор v, по формуле: $v^{(n+1)}=A*w^{(-n)}$. Из полученных значений вектора $v^{(1)}$ выберем максимальное по модулю значение. $\|v^{(1)}\|$.

4.2 Методом вращений Якоби определить все собственные вектора матрицы А.

Метод вращения Якоби заключается в следующем: ищем максимальный элемент, лежащий выше главной диагонали a_{km}(k<m). Вычислим угол поворота $\varphi = \frac{1}{2} * \arctan(\frac{2*a_{km}}{a_{kk}-a_{mm}})$. Определим матрицу поворота H, для этого введем единичную матрицу E и изменяем в ней те элементы, которые стоят на пересечение строк и столбцов с номерами k, m; $h_{kk}=\cos\varphi$,$h_{mk}=\sin\varphi$,$h_{km}=-\sin\varphi$,$h_{mm}=\cos\varphi$. Поворот осуществляется перемножением матриц: $H^{-1}*A*H$.

Задание 5.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1 Методом половинного деления найти значение уравнения:

$$\frac{x^3}{Nг^3} - \frac{x}{Nг} + \frac{x}{Nc} = 0$$

На интервале $x \in [Nг; Nc]$.

5.2 Методом простых итераций решить уравнение:

$$\frac{x^3}{Nc*Nг} + 2x - (Nc + Nг) = 0$$

На интервале $x \in [Nг; Nc]$.

5.3 Методом Ньютона решить уравнение:

$$\frac{x^3}{(Nc+Nг)} + \frac{x}{Nc} + (Nc * Nг) = 0$$

На интервале $x \in [Nг; Nc]$.

5.4 Методом хорд решить уравнение:

$$\frac{x^3}{(Nг+1)} + \frac{x}{Nc} - (Nc * Nг) = 0$$

На интервале $x \in [Nг; Nc]$.

Задание 6.

АПРОКСИМАЦИЯ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.

По заданной таблице построить интерполяционный многочлен по первым четырем узлам, по последним 4 узлам и по всем 5 узлам для каждого случая вычислить функционал невязки и сравнить результаты аппроксимации:

x	-2	-1	0	1	2
y	Nc	Nг	-1	Nc	Nг

Для нахождения вида полинома и исключения отрицательных и положительных ошибок, возводятся в квадрат все ошибки и складываются для всех узлов

$$x_i.\sum_{i=1}^{n}(y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c) = \Psi_{(abc)} \qquad (7.1)$$

Для разных парабол (для разных a b c) значение функционала невязки $\Psi_{(abc)}$ будет разным. Попробуем найти такие три числа a, b, c, для которых значение невязки $\Psi_{(abc)}$ было бы минимально.

Поскольку ищется минимум функции трех переменных, все частные производные должны приравняться нулю:

$$\begin{cases} \frac{d\,f}{da} = 0 \\ \frac{d\Psi}{db} = 0 \\ \frac{d\Psi}{dc} = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} \sum_{i=1}^{0} 2\left(y_i - a * x_i^2 - bx_i - c\right)\left(x_i^2\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{0} 2\left(y_i - a * x_i^2 - bx_i - c\right)\left(x_i^2\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{0} 2\left(y_i - a * x_i^2 - bx_i - c\right) = 0 \end{cases} \qquad (7.2)$$

После преобразования получаем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными a, b, c, которую решают любым известным способом:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) * a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) * b + c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * c = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 y_i) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) * a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * b + c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * c = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * b + n * c = \sum_{i=1}^{n}(y_i) \end{cases} \qquad (7.3)$$

После нахождения решения системы записывают аппроксимационный полином и строят его на декартовой системе координат вместе с узлами интерполяции.

Задание 7.

ЛИНЕЙНАЯ АПРОКСИМАЦИЯ

По заданной таблице методом наименьших квадратов построить многочлены первой и второй степени, аппроксимирующие табличную функцию

x	-2,5*a	-1,5*a	-0,5*a	0,5*a	1,5*a
y	84-Nг	73-Nг*2	63-Nг*3	55*Nг*4	47-Nг*5

a=Nс+Nг.

Полиномом $P(x) = bx + c$, В функции P(x) отсутствует коэффициент при x^2 , т.е. a=0, и невязка $\Psi_{(bc)}$ зависит только от b и c:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - P(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - b * x_i - c)^2 = \Psi_{(bc)} \quad (8.1)$$

Получим систему

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 * b + c(\sum_{i=1}^{n} x_i) * c = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)\right) \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) * b + n * c = \sum_{i=1}^{n}(y_i) \end{cases} \quad (8.2)$$

Решив эту систему, найдем числовые значения b и c, те самые, для которых квадратичная невязка будет принимать минимальное значение. Полученный таким образом многочлен $P(x) = bx + c$ является для табличной функции оптимальным в смысле минимизации невязки среди всех линейных многочленов.

Задание 8.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ

Аппроксимировать табличную функцию кубическими сплайнами; переменная x изменяется на отрезке [a;b], которая разбивается на n частей. Значения табличной функции на [a;b] вычислить по формуле:

f(x)=Nгx+sin(x)

N=4, a=Nc, b=Nc+N

Сделать проверку: вычислить значение аппроксимирующей функции и сплайна в узловых точках, между узловыми точками. Нарисовать сплайн и табличную функцию.

Задание 9.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Вычислить значение определенного интеграла по формуле трапеции с числом узлов 11,21(с шагами 0.1; 0.05) Результат уточнить по формуле Рунге-Ромберга.

I=$\int_0^1 (x)^{N\text{г}} * (Ln(x))^{Nc} dx$

Вычислить значение определенного интеграла по формуле Симпсона с числом узлов 10,20. Результат уточнить по формуле Рунге-Ромберга.

I=$\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{2*N\text{г}} * (\cos(x))^{2*Nc} dx$

Задание 10.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Решение задачи Коши для ОДУ второго порядка следующего вида

Y”+Y=a*x

$y(0) = 0, y'(0) = a + b$

$0 \leq x \leq \pi$

b=Nг

a=$\sqrt{Nc}$

Решить ОДУ методом Эйлера с числом узлов 5,10,15.Решить ОДУ методом Рунге-Кутты с числом узлов 5, 10.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Для студентов заочной формы обучения необходимо выполнить задания № 1, для успе

Задание 1. Методом Гаусса вычислить определитель, обратную матрицу и решить СЛАУ вида: A*$\bar{x}$=$\bar{b}$

$$A=\begin{bmatrix} N_c & 5 & 2 \\ 5 & N_c & -N_г \\ 2 & -N_г & N_c \end{bmatrix} \qquad \bar{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ N_c \\ -N_г \end{bmatrix}$$

Где N_c – номер студента по списку в журнале; $N_г$- номер группы.

Пример решения задания 1.

Матрица имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix} 17 & 5 & 2 \\ 5 & 17 & -4 \\ 2 & -4 & 17 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 17 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Получили единицу в 1-ом столбце, разделив 1-ую строку на 17

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/17 & 2/17 & 1/17 \\ 5 & 17 & -4 & 17 \\ 2 & -4 & 17 & -4 \end{array}\right]$$

Для обнуления 1 элемента во 2-ой строке, умножим 1-ую строку на 5 и вычтем 1 строку из 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/17 & 2/17 & 1/17 \\ 0 & 264/17 & -78/17 & 284/17 \\ 2 & -4 & 17 & -4 \end{array}\right]$$

Для обнуления 1 элемента в 3 строке ,умножим 1 строку на 2 и вычтем её из 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/17 & 2/17 & 1/17 \\ 0 & 264/17 & -78/17 & 284/17 \\ 0 & -78/17 & 285/17 & -70/17 \end{array}\right]$$

Для получения 1 на главной диагонали во 2-ой строке, разделим ее на 264/17.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/17 & 2/17 & 1/17 \\ 0 & 1 & -13/44 & 71/66 \\ 0 & -78/17 & 285/17 & -70/17 \end{array}\right]$$

Для обнуления 2 элемента 3 строки, умножим ее на -78/17 и вычтем ее из 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/17 & 2/17 & | & 1/17 \\ 0 & 1 & -13/44 & | & 71/66 \\ 0 & 0 & 339/22 & | & 9/11 \end{bmatrix}$$

Для получения 1 на главной диагонали, разделим 3 строку на 339/22

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/17 & 2/17 & | & -1/17 \\ 0 & 1 & -13/44 & | & 71/66 \\ 0 & 0 & 1 & | & -61/113 \end{bmatrix}$$

Закончился прямой ход метода Гаусса. Эта матрица соответствует системе:

$$\begin{cases} x + 5/17y + 2/17z = -1/17 \\ \quad y - 14/44z = 71/66 \\ \quad\quad z = -61/113 \end{cases}$$

Определитель системы равен произведению тех элементов главной диагонали, на которые мы делили строки:

$|A|$=17*264/17*339/22=4068

Последнее уравнение сразу даёт z =-61/113.Подставляем найденное z во второе уравнение и находим y, соответственно также находим и x.

Окончательно СЛАУ можно записать:

$$\begin{cases} x = -0.362 \\ y = 1.248 \\ z = -61/113 \end{cases}$$

Найти обратную матрицу для этой же матрицы.

A/E=$\begin{bmatrix} 17 & 5 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 17 & -4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 17 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Получим 1, разделив 1 строку на 17.

A/E=$\begin{bmatrix} 1 & 5/17 & 2/17 & | & 1/17 & 0 & 0 \\ 5 & 17 & -4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 17 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Помножим 1 строку на 5 и вычтем ее из 2 строки.

A/E=$\begin{bmatrix} 1 & 5/17 & 2/17 & | & 1/17 & 0 & 0 \\ 0 & 264/17 & -78/17 & | & -5/17 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 17 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Умножим 1 строку на 2 и вычтем ее из 3.

$$A/E=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 5/17 & 2/17 & 1/17 & 0 & 0\\ 0 & 264/17 & -78/17 & -5/17 & 1 & 0\\ 0 & -78/17 & 285/17 & -2/17 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Разделим 2 строку на 264/17, для получения 1 во 2 столбце.

$$A/E=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 5/17 & 2/17 & 1/17 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -13/44 & -5/264 & -17/264 & 0\\ 0 & -78/17 & 285/17 & -2/17 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Получим 0 в 3 строке, умножив 2 строку на -78/17 и вычтем её из 3 строки.

$$A/E=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 5/17 & 2/17 & 1/17 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -13/44 & 5/264 & 17/264 & 0\\ 0 & 0 & 339/22 & -9/44 & -13/44 & 1\end{array}\right]$$

Разделим 3 строку на 339/22 и получим 1 на главной диагонали.

$$A/E=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 5/17 & 2/17 & 17/264 & -5/264 & 0\\ 0 & 1 & -13/44 & -5/264 & 17/264 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3/226 & 13/678 & 22/339\end{array}\right]$$

Закончился прямой ход метода Гаусса. Начинаем обратный ход, в котором обнулим все элементы, лежащие выше главной диагонали в левой подматрице.

Умножим 3 строку на 2/17, вычтем её из 1 строки и получим:

$$A/E=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2/17 & 91/1356 & -31/1356 & -3/226\\ 0 & 1 & -13/44 & -5/264 & 17/264 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & -1/6 & 7/24\end{array}\right]$$

Умножим 3 строку на (-13/44),вычтем ее из 2 строки:

$$A/E=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 91/1356 & -31/1356 & -3/226\\ 0 & 1 & 0 & -31/1356 & 95/1356 & 13/678\\ 0 & 0 & 1 & -3/226 & 13/678 & 22/339\end{array}\right]$$

Процесс преобразования (и обратный ход метода Гаусса тоже) закончен. Та матрица, которая стоит в правой части расширенной матрицы и есть искомая обратная матрица:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}91/1356 & -31/1356 & -3/226\\ -31/1356 & 95/1356 & 13/678\\ -3/226 & 13/678 & 22/339\end{bmatrix}$$

Задание 2. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом простых итераций.

$$B=\begin{bmatrix} Nc+10 & N\text{г} & 1 & 1 \\ N\text{г} & Nc+10 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & N\text{г}+4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & N\text{г}+Nc \end{bmatrix} \quad c=\begin{bmatrix} N\text{г} \\ Nc+10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

С заданной точностью ع$=10^{-3}$

Пример решения задания 2.

$$B=\begin{bmatrix} 27 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 27 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 21 \end{bmatrix} \quad c=\begin{bmatrix} 4 \\ 27 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

С заданной точностью ع$=10^{-3}$

Составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 27x + 4y + z + f = 4 \\ 4x + 27y + 2z + 2f = 27 \\ x + 2y + 8z + f = 0 \\ x + y + z + 21f = 1 \end{cases}$$

В данной системе уравнений, диагональные элементы оставим слева от знака равно, а все остальные перенесем вправо.

$$\begin{cases} 27x = 0x - 4y - z - f + 4 \\ y = -4x + 0y - 2z - 2f + 27 \\ 8z = -x - 2y + 0z - f + 0 \\ 21f = -x - y - z + 0f + 1 \end{cases}$$

Разделим первую и вторую строку на «27», третью на «8», четвертую на «21».

$$B=\begin{bmatrix} 0 & -4/27 & -1/27 & -1/27 \\ -4/27 & 0 & -2/27 & -2/27 \\ -1/8 & -1/4 & 0 & -1/8 \\ -1/21 & -1/21 & -1/21 & 0 \end{bmatrix} \quad c=\begin{bmatrix} 4/27 \\ 1 \\ 0 \\ 1/21 \end{bmatrix}$$

Вычислим норму матрицы B и вектора ß.

$$\|B\|_1 = \max\{(0 + 4/27 + 1/27 + 1/27)(4/27 + 0 + 2/27 + 2/27)\ (1/8 + 1/4 + 0 + 1/8)\ (1/21 + 1/21 + 1/21)\} = 0.5$$

$$\|B\|_2 = \{(4/27 + 1/8 + 1/21)\ (4/27 + 2/8 + 1/21)\ (\tfrac{1}{27} + \tfrac{2}{27} + 1/21)\ (1/27 + 2/27 + 1/8)\} = 0.446$$

$$\|\beta\|_1 = \{4/27;\ 1;\ 0;\ 1/21\} = 1$$

Так как норма матрицы B меньше 1, запишем итерационный процесс.

$$\begin{cases} x^{n+1} = 0x^n - (\frac{4}{27y})^n - (\frac{1}{27z})^n - (\frac{1}{27f})^n + 4/27 \\ y^{n+1} = -4/27x^n + oy^n - 2/27z^n - 2/27f^n + 1 \\ z^{n+1} = -1/8x^n - 1/4y^n + 0z^n - 1/8^n + 0 \\ f^{n+1} = -1/21x^n - 1/21y^n - 1/21z^n + 0f^n + 1/21 \end{cases} \quad (3.1)$$

Итерационный процесс будет сходиться к точному решению искомой системы. За начальный вектор возьмем x_1= ß, получим:

$$x_1 = \beta = \begin{pmatrix} 0.148 \\ 1 \\ 0 \\ 0.148 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

X_2 получается путем подстановки численного вектора (1) во (2) систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} x_2 = 0 * 0.148 - \frac{4}{27} * 1 - \frac{1}{21} * 0 - \frac{1}{27} * (0.048) + \frac{4}{27} \\ y_{2=} - \frac{4}{27} * 0.148 + 0 * 1 - \frac{2}{27} * 0 - \frac{2}{27} * 0.048 + 1 \\ z_2 = -\frac{1}{8} * (0.148) - \frac{1}{4} * 1 + 0 * 0 - \frac{1}{8} * 0.048 + 0 \\ f_2 = -\frac{1}{21} * 0.148 - \frac{1}{21} * 1 - \frac{1}{21} * 0 + 0 * 0.048 + \frac{1}{21} \end{cases} \begin{cases} x_2 = -0.00178 \\ y_2 \quad = 0.975 \\ z_2 \quad = -0.2745 \\ f_2 \quad = -0.0071 \end{cases}$$

Оценим погрешность найденных значений вектора x_2

$$\varepsilon_2 = \frac{\|B\|^1}{1-\|B\|} \quad (3.3)$$

ε_2= (|B1|/ 1- | B1|)*| ß|=(0.6/1-0.6)*1/6=0.25

δ_2=$\left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\|_1 = \max|0.148 - (-0.00178))(1 - 0.975)((0 - (0.2745)(0.048 - (-0.0071) = (0.149;\ 0.025; 0.2745; 0.0551)$

Проведем еще несколько итераций, процесс продолжается пока вычисляемая погрешность δ не будет равна ε. Сведем данные в таблицу.

Таблица 3.1

Процесс итераций для нахождения корней СЛАУ

№	x	y	z	f	ε	δ
1	0.148	1	0			
2	-0.00178	0.975	-0.2745	0.0071	0.805	0.2745
3	0.01412	1.021	0.0305	0.0143	0.359	-0.0072
4	-0.004	0.9945	-0.2588	-0.0018	0.16	0.289

5	0.014	1.019	-0.247	0.0129	-0.2478	0.0129
6	0.005	0.0151	-0.257	0.0104	0.0318	1.0038
7	0.155	1.0174	-0.0058	-0.00042	0.01421	0.0109
8	-0.002	0.9775	-0.2736	-0.0079	0.00634	0.2678
9	0.01375	1.0219	-0.243	0.0143	0.0028	-0.0161
10	0.053	1.0148	-0.2588	0.0099	0.00126	0.0063
11	0.007	1.0105	-0.2616	0.0091	0.00056	0.046
12	0.007	1.017	-0.2465	0.0117	0.0025	0.0009

Процесс сходиться на 12 шаге, Если подставить значения в компонент x_8 в исходную систему уравнений, то получим равенство с точностью ε

Задание 3. Аппроксимация методом наименьших квадратов.

По заданной таблице построить интерполяционный многочлен по первым 4 узлам по последним 4 узлам и по всем 5 узлам табличной функции. Рассчитать во всех случаях функционал невязки и сделать выводы о наилучшей аппроксимации.

x	-2	-1	0	1	2
y	Nс	Nг	-1	Nс	Nг

Пример решения задания 3.

x	-2	-1	0	1	2
y	17	4	-1	17	4

Для нахождения вида полинома и исключения отрицательных и положительных ошибок, возводятся в квадрат все ошибки и складываются для всех узлов

$$x_i.\sum_{i=1}^{n}(y_i \; - a{x_i}^2 \; - bx_i - c = \Psi_{(abc)} \qquad (1)$$

Для разных парабол (для разных a b c) значение функционала невязки $\Psi_{(abc)}$ будет разным. Попробуем найти такие три числа a, b, c, для которых значение невязки $\Psi_{(abc)}$ было бы минимально.

Поскольку ищется минимум функции трех переменных, все частные производные должны приравняться нулю:

$$\begin{cases} \frac{df}{da} = 0 \\ \frac{d\Psi}{db} = 0 \\ \frac{d\Psi}{dc} = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} \sum_{i=1}^{0} 2\left(y_i \; - \; a * x_i^2 - bx_i - c\right)\left(x_i^2\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{0} 2\left(y_i \; - \; a * x_i^2 - bx_i - c\right)\left(x_i^2\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{0} 2\left(y_i \; - \; a * x_i^2 - bx_i - c\right) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

После преобразования получаем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными a, b, c:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) * a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) * b + c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * c = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 y_i) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) * a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * b + c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * c = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * b + n * c = \sum_{i=1}^{n}(y_i) \end{cases} \qquad (3)$$

Решим эту систему (например, методом Гаусса), найдем числовые значения a,b,c, те самые, для которых квадратическая невязка (1) будет принимать минимальное значение. Полученный таким образом многочлен

$P(x) = ax^2 + bx + c$ является для табличной функции оптимальным в смысле минимизации невязки (1) среди всех многочленов второй степени.

Вычислим коэффициенты системы (3)

N=4

$\sum_{i=1}^{4} x_i = -2$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 6$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^3 = -8$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^4 = 18$, $\sum_{i=1}^{4} y_i = 37$ $\sum_{i=1}^{4} x_i\, y_i = -21$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i = 89$.

Теперь система примет вид (3)

$$\begin{cases} 18a + (-8b) + 6c = 89 \\ -8a + 6b + (-2c) = -21 \\ 6a + (-2b) + 4c = 37 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим a=7.75, b=7.25, c=1.25, т.е. $P(x) = ax^2 + bx + c = 7.75x^2 + 7.25x + 1.25$

Построим этот многочлен и точки таблицы:

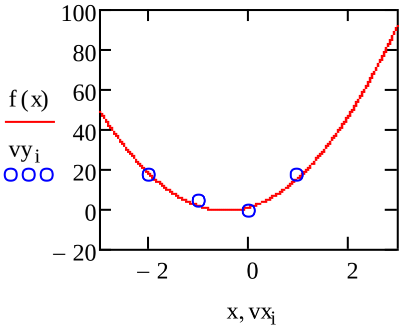


Рисунок 1. График интерполяционного многочлена.

Среднеквадратическая невязка $\Psi_{(abc)} = 78.25$.

Определить по примеру все многочлены и функционалы невязки. Сделать выводы о наилучшем приближении.

Задание 4. Решение нелинейного уравнения методом Ньютона.

Найти решение системы нелинейных уравнений методом ньютона при помощи программного комплекса Mahtcad. Построить график функции *f*(*x*) и приблизительно определить один из корней уравнения. Решить уравнение *f*(*x*)= 0 с точностью e=10^{-4} методом Ньютона (касательных), используя функцию *until*. Определить число итераций в каждом методе, с помощью функции *last*

Варианты задания 4

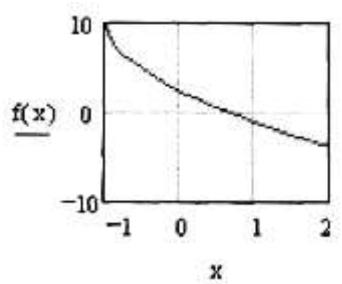
№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	$3\,sin(\sqrt{x}) + 0.35x - 3.8$ $x \in [2,3]$	6	$0.25x^3 + x - 2$ $x \in [0,2]$	11	$\sqrt{2x^2 + 1.2 - cos\,x} - 1$ $x \in [0,1]$
2	$x - \dfrac{1}{3 + sin(3.6x)}$ $x \in [0,1]$	7	$a\,cos\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right) - x$ $x \in [2,3]$	12	$cos\left(\dfrac{2}{x}\right) - 2\,sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x}$ $x \in [1,2]$
3	$arccos\,x - \sqrt{1 - 0.3x^3}$ $x \in [0,1]$	8	$3x - 4\,ln(x) - 5$ $x \in [2,4]$	13	$0.1x^2 - x\,ln(x)$ $x \in [1,2]$
4	$\sqrt{1 - 0.4x^2} - arcsin\,x$ $x \in [0,1]$	9	$e^x - e^{-x} - 2$ $x \in [0,1]$	14	$1 - x + sin\,x - ln(1 + x)$ $x \in [0,2]$

5	$3x - 14 + e^x - e^{-x}$ $x \in [1,3]$	10	$\sqrt{1-x} - \operatorname{tg} x$ $x \in [0,1]$	15	$e^{x-1} - x^3 - x$ $x \in [0,1]$

Пример выполнения задания 4.

Использование функции until для реализации метода Ньютона.

Отделение корней для функции:



$f(x) := a\cos(x)^2 - x \qquad x := -1, -0.9 \,..\, 2$

$x_0 := 1$ - начальное приближение, определенное по графику $f(x) = 0$

Рис.1. Определение начального приближения

Уточнение корней (методом Ньютона).

$n := 100$ - предположительное число итераций $i := 1..n$;

$\varepsilon := 10^{-4}$ - задание точности вычислений.

Определение функции, вычисляющей производную от $f(x)$:

$$df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

Вычисление первого приближения по формуле Ньютона:

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)}$$

Реализация итерационного процесса по методу Ньютона с использованием функции *until:*

$$x_{i+1} := \mathrm{until}\left(|x_i - x_{i-1}| - \varepsilon,\ x_i - \frac{f(x_i)}{df(x_i)}\right)$$

Определение числа итераций, за которые итерационный процесс сошелся :$j := \mathrm{last}(x)$; $j = 4$

$x_{j-1}. = 0.6792$- корень уравнения $f(x) = 0$;

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.66667 \\ 0.61917 \\ 0 \end{bmatrix}$$- итерационная последовательность.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа выполняется в соответствие с требованиями ГОСТ в рамках на листах формата А-4 машинописным текстом. Шрифт TNR размер 14 полуторный интервал. Красная строка отступ 1,5мм. Все рисунки располагаются с красной строки, с номером и названием, выполняются в редакторе Word сгруппированными. Формулы печатаются в редакторе Microsoft Equation стиль-математический. Нумерация рисунков и формул сквозная или по разделам.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.- М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003.

2. Ращиков В. И., Рошаль А. С. Численные методы решения физических задач.- СПб.: Изд-во «Лань».2005.

3. М.В. Вербицкий «Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения», М. Издательство « Высшая школа», 2000.

4. Миносцев В.Б. Курс высшей математики (части 1-3). М. РИЦ МГИУ, 2002.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Методические указания к выполнению курсовой работы

по дисциплине «Численные методы»

для студентов направления «Управление в технических системах»

всех форм обучения

СОСТАВИЛА ЕФРЕМОВА Татьяна Александровна

Рецензент Ю.А. Мефедова

Редактор Л.В.Максимова

Подписано в печать Формат 60х84 1/8

Бумага тип.Усл.печ.л. Уч.- изд.л.

ираж 100 экз. Заказ Бесплатно